

九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(二)

(嘉義高中)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1小時。
- (2)本試卷共五題，滿分21分，第一題4分，第二題4分，第三題4分，第四題4分，第五題5分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

1. 如果定義在實數上的函數 $f(x) = 7x - 4|x|$ 有反函數，求其反函數。若無，請解釋。
2. 設 $f(x, y) = (\sqrt{2}x - \sqrt{2}y, \sqrt{2}x + \sqrt{2}y)$ 為定義在實數平面上的函數，且 $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ 。令 $B = \{f(x, y) | (x, y) \in A\}$ ，求 B 所涵蓋的面積。
3. 若 $f(t) = \frac{1 + \sin t}{3 + 2 \cos t}$ ，其中 t 為實數，求 $f(t)$ 的最大值。
4. 若 a, b 為整數，則 $\frac{a}{299} + \frac{b}{481}$ 的最小正值。
5. 設 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆為定義於實數上的函數。已知 $g(x) > 0$ ， $f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + 2}$ 和 $g(x)g(1-x) = 4$ 對所有實數 x 皆成立。求 $f\left(\frac{1}{2004}\right) + f\left(\frac{2}{2004}\right) + \cdots + f\left(\frac{2003}{2004}\right)$ 的值。