

九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（一）試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時(13:20~15:20)。
- (2) 配分：每題 35 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：設正實數數列 t_1, t_2, \dots 是一個公比為 10 的等比數列。試求所有可能的正整數 n 及所有的 n 次多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ，滿足：最高次項係數 a_n 是整數，且

$$|f(\log_{10} t_k)| = 93, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n+1.$$

【問題二】：在某一個 $\triangle ABC$ 中，過頂點 B 作一直線與 $\angle C$ 的平分線垂直，垂足為 D ；過頂點 C 作一直線與 $\angle B$ 的平分線垂直，垂足為 E 。設點 D 在 $\triangle ABC$ 的外部，點 E 在 $\triangle ABC$ 的內部且 $\triangle ABC$ 的內切圓在邊 \overline{AB} 、 \overline{CA} 上的切點分別為點 P 、 Q 。試證：直線 DE 通過 P 、 Q 兩點。

【問題三】：正八邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8$ 的內部可被它的對角線分割成 80 個區域。試求所有可能的正整數 n ，使得我們可將其中 n 個區域塗色後，滿足：每一個 $\triangle A_i A_j A_k$ 的內部都恰有一個塗色的區域。