九十二學年度高級中學數學科能力競賽試題(一)

北區 第四區(新竹高中)

編號：______________

注意事項：

(1)時間分配：2 小時。

(2)配分：滿分 49 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：在坐標平面上給定一點 $A(2,5)$，試在直線 $y=x$ 上找一點 P，使得 $\overline{AP}-\overline{PQ}$ 為最小，其中 Q 為 P 在直線 $2x-5y=0$ 上的垂足。請求出 P 點的坐標，並證明之。

[問題二]：試求出所有的正整數 a、b，使得 $\dfrac{a^2+b}{ab+1}$ 為正整數。

[問題三]：將 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 依順時針方向排列在一圓周上，其中 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{48}$ 為 $1, 2, 3, \cdots, 48$ 的一種排列。設 $f(n)$ 表示圓周上從第 n 個數 a_n 開始依順時針方向連續的 16 個數中是偶數的個數。

(a) 試證：$f(1)\ f(2)\cdots f(48) \leqq 2^{144}$；

(b) 試證：必有一整數 $k \in \{1,2,3,\cdots,48\}$ 使得 $f(k)=8$.