2.1 第46 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第 46 屆國際數學奧林匹亞 (IMO) 競賽試題

美利達　墨西哥

第一天

2005 年 7 月 14 日

Language: Chinese (Taiwan)

1. 在正三角形 ABC 的三邊上依下列方式選取六個點: 在邊 BC 上取 A_1, A_2; 在邊 CA 上取 B_1, B_2; 在邊 AB 上取 C_1, C_2, 使得上述六個點形成凸六邊形 $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ 其邊長都相等。試證: 三直線 A_1B_2, B_1C_2 與 C_1A_2 共點。

2. 設 $a_1, a_2, \cdots$ 爲一個整數數列且其中有無窮多項正整數及無窮多項負整數。如果對每一個正整數 n, 整數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 被 n 除後所得的 n 個餘數都不同。試証: 每一個整數恰好在此整數數列中出現一次。

3. 設 x, y 和 z 爲正實數且滿足 $xyz \geq 1$. 試証

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

考試時間: 4 小時 30 分

每題 7 分

第 46 屆國際數學奧林匹亞 (IMO) 競賽試題

美利達　墨西哥

第二天

2005 年 7 月 14 日

Language: Chinese (Taiwan)

4. 已知數列 $a_1, a_2, \cdots$ 定義如下:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \cdots)$$

試求與此數列中的每一項都互質的所有正整數。

5. 已知 $ABCD$ 爲一凸四邊形, $BC = AD$, 且 BC 不平行於 AD. 令 E 和 F 分別爲 BC 和 AD 邊上內部的點, 且滿足 $BE = DF$. 直線 AC 與 BD 交於 P 點, 直線 BD 與 EF 交於 Q 點, 直線 EF 與 AC 交於 R 點。試証: 當 E 和 F 變動時, 三角形 PQR 的外接圓經過除 P 點外的另一個定點。

6. 在某次數學競賽中提供參賽者六個題目, 其中的任二題都有超過 $\frac{2}{5}$ 的參賽者答對了。但沒有一位參賽者能答對所有的六個題目。試証: 至少有二位參賽者都恰好答對了五個題目。

考試時間: 4 小時 30 分

每題 7 分