

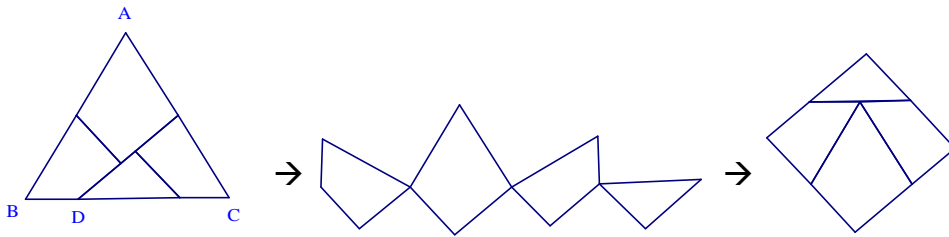
九十三學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區 第四區（新竹高中） 筆試(一) 試題

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一題 16 分，第二題 16 分，第三題(a)7 分，(b)10 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案寫在答案卷內。

[問題一] 試證：對任意正整數 n ， $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ 皆為正整數，而且是 2^n 的倍數。

[問題二] 邊長為 4 的正三角形 ABC 紙板，如圖所示將它剪開，然後可以拼成一個正方形。試求 BD 的長度。



[問題三] 小明有 64 張卡片，每張卡片上都有不同的條碼。小明只知道每一組條碼代表一個數字，但是他不知如何解讀這些條碼。為判讀這些條碼所代表的意義，小明有一台機器可供使用。這台機器每次操作可以讀取兩張卡片，然後告訴小明哪一張卡片上的條碼所代表的數字較大。

- (a) 為找出這堆條碼所代表的第二大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？
- (b) 為找出這堆條碼所代表的第三大的數字的卡片，小明至少需要操作這台機器幾次？證明你的答案。