

# 94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

## 獨立研究（二）試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時。
- (2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (3) 不可使用電算器。
- (4) 試題與答案卷一同繳回。

**【問題一】**：94 個保險箱，94 把鑰匙。每把鑰匙恰好能開一個保險箱，每個保險箱也只會有一把鑰匙能開。現在主人隨機地在每個保險箱裡面放一把鑰匙，把其中的 92 個保險箱鎖上，而保留兩個保險箱開著（這個動作也是隨機的），試求用這兩個保險箱的鑰匙，能打開其餘的 92 個保險箱的機率是多少？  
（附註：保險箱一旦被打開，鎖在裡面的鑰匙就可用來試著打開其他的保險箱）

**【問題二】**：假定  $0 \leq x \leq 5$ ，試求滿足  $[x^2 - 2x] = [x]^2 - 2[x]$  的一切實數  $x$ ，其中  $[x]$  表示不超過  $x$  的最大整數。

**【問題三】**：若正整數  $p, q, r$  使得二次方程式  $px^2 - qx + r = 0$  在開區間  $(0, 1)$  內有兩個不同的實根，試求  $p$  的最小值。