

94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區） 筆試(一) 試題

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由
作答時間二小時

1、設 $f(x) = x^{2005} + x^{2004} + \dots + x + 1$ ，試求 $f(x^{2006})$ 除以 $f(x)$ 所得的餘數。

2、設 a, b, n 為整數，若 $a+b$ 可被 n 所整除，且 $a^2 + b^2$ 可被 n^2 所整除。

試證：對所有正整數 k ， $a^k + b^k$ 可被 n^k 所整除。

3、已知正數 a, b, c 滿足 $abc=1$ 。試證：

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}$$

4、在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， D 為 \overline{AC} 的中點、且 $\overline{BD} = \sqrt{3}$ 。試問當 $\angle BAC$ 為何值時， $\triangle ABC$ 的面積有最大值？此面積最大值為何？

5、設正方形 $ABCD$ 的邊長為 2，若 P 為正方形外之一點使 $\overline{AP} \parallel \overline{BD}$ ，且 $\overline{BP} = \overline{BD}$ ，

試求：(a) $\angle APD$ 的度數 (b) 線段 \overline{AP} 之長